



## DANGAUS KŪNŲ POVEIKIO SUNKIO LAUKUI ĮVERTINIMAS

Petras Petroškevičius<sup>1</sup>, Darius Popovas<sup>2</sup>

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas: <sup>1</sup>petras.petroskevicius@ap.vgtu.lt, <sup>2</sup>darius@geobiuras.lt

Įteikta 2007 11 29, priimta 2007 12 18

**Santrauka.** Analizuojamas dangaus kūnų poveikis sunkio laukui. Šį poveikį būtina įvertinti atliekant precizinius geodezinius, gravimetrinius ir astronominius matavimus, nustatant punktų koordinates, Žemės gravitacijos lauko parametrus bei atliekant geodinaminius tyrimus. Didžiausią poveikį sunkio laukui lemia artimiausi Žemei dangaus kūnai – Mėnulis ir Saulė. Taikant potvynio potencialą, gautos patikslintos formulės dangaus kūnų poveikiui įvertinti. Atliktas Mėnulio ir Saulės poveikio sunkiui, vertikalei bei aukščių skirtumui įvertinimas. Pateikti poveikio visai Žemei ir Lietuvos teritorijai įvertinimo rezultatai.

**Reikšminiai žodžiai:** dangaus kūnų poveikis, potvynio potencialas, sunkis, vertikalės nuokrypis.

## 1. Įvadas

Judančių dangaus kūnų trauka keičia Žemės sunkio lauką bei jos formą. Poveikį būtina įvertinti atliekant precizinius geodezinius, gravimetrinius ir astronominius matavimus, nustatant punktų koordinates ir Žemės gravitacijos lauko parametrus (Mäkinen *et al.* 2006; Ihde *et al.* 2006; Kenyeres *et al.* 2007; Mäkinen 2000; Torge 1989; Burša, Kostelecky 1999) bei vykdant geodinaminius tyrimus (Zakarevičius, Anikėnienė 2007; Aksamitauskas *et al.* 2005; Jentzsh *et al.* 1999). Šie klausimai aktualūs sprendžiant geodezinius uždavinius ne tik klasikiniiais, bet ir pačiais naujaisiais kosminės geodezijos metodais (Poutanen *et al.* 1996). Dangaus kūnų poveikio Žemei analizė teikia vertingos informacijos tiriant Žemės vidinę sandarą bei jos tamprumo savybes (Burša, Kostelecky 1999). Didėjantis matavimų tikslumas reikalauja išsamesnių dangaus kūno poveikio tyrimų ir tikslesnio jo įvertinimo (Mäkinen, Petroškevičius 2003; Skeivalas, Krikštaponis 2001). Tai aktualu ir Lietuvoje atliekamiems geodeziniam darbams, kurie būtini kuriant nūdienos geodezinį pagrindą (Būga *et al.* 2006; Krikštaponis *et al.* 2007; Paršeliūnas, Petroškevičius 2007; Petroškevičius 2004). Straipsnyje pateikiamos taikant potvynių potencialą gautos patikslintos formulės dangaus kūnų poveikiui įvertinti. Didžiausią poveikį sunkio laukui lemia arti nuo Žemės esantys dangaus kūnai. Atliktas Mėnulio ir Saulės poveikio įvertinimas. Pateikti poveikio visai Žemei ir Lietuvos teritorijai įvertinimo rezultatai.

## 2. Potvynio potencialas

Dangaus kūno poveikis sunkio laukui aprašomas potvynio potencialu. Potvynių lemiamas potencialas absoliučiai nesideformuojančiai Žemei gali būti išreikštas sferinių funkcijų eilute (Torge 1989):

$$V_T = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z), \quad (1)$$

čia  $G$  – gravitacijos konstanta;  $m$  – dangaus kūno, laiko mo materialiuoju tašku, masė;  $r$  – geocentrinis atstumas iki dangaus kūno;  $R$  – Žemės paviršiaus taško geocentrinis atstumas;  $z$  – dangaus kūno geocentrinis zenitinis nuotolis;  $P_n(\cos z)$  – Ležandro daugianariai:

$$\begin{aligned} P_2(\cos z) &= \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos z) &= \frac{5}{2} \cos^3 z - \frac{3}{2} \cos z, \\ P_4(\cos z) &= \frac{35}{8} \cos^4 z - \frac{30}{8} \cos^2 z + \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (2)$$

Kiti daugianariai randami taikant rekurenčiąją formulę:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\cos z) &= \frac{2n+1}{n+1} \cos z P_n(\cos z) - \\ &\frac{n}{n+1} P_{n-1}(\cos z). \end{aligned} \quad (3)$$

Apsiribojant pirmaisiais trimis potencialo nariais galima rašyti:

$$\begin{aligned}
V_T = & \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) + \\
& \frac{GmR^3}{r^4} \left( \frac{5}{2} \cos^3 z - \frac{3}{2} \cos z \right) + \\
& \frac{GmR^4}{r^5} \left( \frac{35}{8} \cos^4 z - \frac{30}{8} \cos^2 z + \frac{3}{8} \right). \quad (4)
\end{aligned}$$

Įvertinant dangaus kūnų poveikį priimtos tokios parametrai, apibūdinančių dangaus kūnus ir jų judėjimą, reikšmės (Petroškevičius 2004): selenocentrinės gravitacijos konstantos –  $4902,799 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$ , heliocentrinės gravitacijos konstantos –  $132\,712\,440\,018 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$ ; mažiausiojo ir didžiausiojo geocentrinio atstumo iki Mėnulio –  $356\,400 \text{ km}$  ir  $406\,700 \text{ km}$  bei iki Saulės –  $147\,098\,074 \text{ km}$  ir  $152\,097\,701 \text{ km}$ . Apskaičiuotas mažiausias ir didžiausias Mėnulio zenitinis nuotolis Lietuvos teritorijoje –  $25^\circ 19'$  ir  $154^\circ 41'$ , atitinkamai Saulės –  $30^\circ 28'$  ir  $149^\circ 32'$ . Taikyti GRS 80 elipsoido ir normaliojo sunkio lauko parametrai (Moritz 1984).

### 3. Dangaus kūno poveikis sunkiui

Potvynio potencialo išvestinė vertikalės kryptimi lygi potvynio jėgos projekcijai į vertikalę. Ji išreiškia sunkio  $g$  pakitimą  $\delta g'$  dėl dangaus kūno poveikio:

$$\delta g' = -\frac{\partial V_T}{\partial R}. \quad (5)$$

Diferencijuodami (4) gauname:

$$\begin{aligned}
\delta g' = & \frac{GmR}{r^3} (1 - 3 \cos^2 z) + \\
& \frac{3GmR^2}{2r^4} (3 \cos z - 5 \cos^3 z) + \\
& \frac{GmR^3}{2r^5} (30 \cos^2 z - 35 \cos^4 z - 3). \quad (6)
\end{aligned}$$

Realiai Žemei sunkio pakitimas  $\delta g$  išreiškiamas formulėmis:

$$\delta g = \gamma_1 \delta g', \quad \gamma_1 = 1 + h_2 - \frac{3}{2} k_2, \quad (7)$$

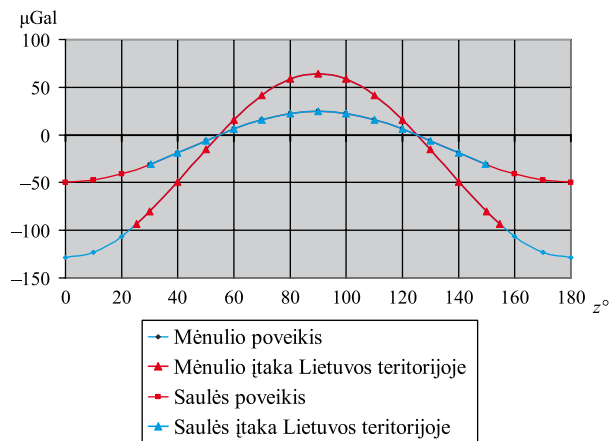
čia  $k_2 = 0,299\,3$ ,  $h_2 = 0,605\,3$  – Lové skaičiai, priklausantys nuo Žemės tamprumo (Varga 1989).

Dangaus kūnų poveikiui įtakos turi zenitinis nuotolis (1 pav.).

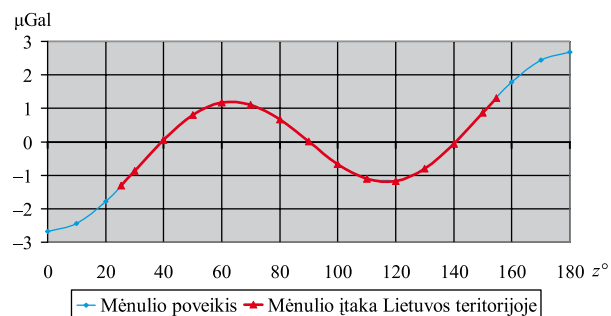
Atlikti tyrimai rodo, kad pagal formules (6, 7) nustatomi Mėnulio lemiami sunkio pokyčiai gali siekti  $196,05 \mu\text{Gal}$ , Saulės –  $74,36 \mu\text{Gal}$ . Lietuvos teritorijoje maksimalios šių pokyčių reikšmės kiek mažesnės: Mėnulio –  $157,81 \mu\text{Gal}$ , Saulės –  $55,24 \mu\text{Gal}$ .

Formulės (6) antrojo nario kitimo pobūdis parodytas 2 paveiksle.

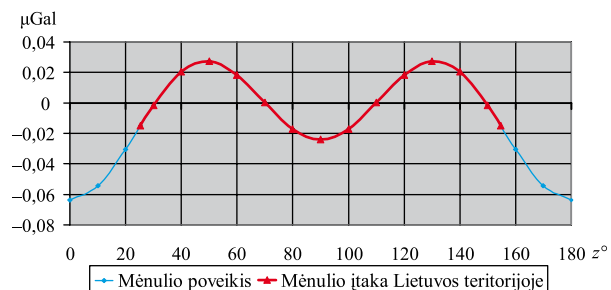
Maksimali antrojo nario įtaka –  $5,35 \mu\text{Gal}$  dėl Mėnulio ir  $0,01 \mu\text{Gal}$  dėl Saulės. Į trečiąją formulės narį reikėtų kreipti dėmesį tik vertinant Mėnulio poveikį, dėl kurio šio nario reikšmė gali siekti  $0,09 \mu\text{Gal}$ . Trečiojo nario priklausomybė nuo dangaus kūno zenitinio nuotolio parodyta 3 paveiksle.



1 pav. Dangaus kūnų lemiamas sunkio kitimas  
Fig 1. Gravity change due to celestial bodies



2 pav. Antrojo nario įtaka sunkiui  
Fig 2. Influence of the second member



3 pav. Trečiojo nario kitimas  
Fig 3. Influence of the third member

Taigi atliekant tiksluosius gravimetrinius matavimus reikėtų įvertinti ir formulės (6) trečiojo nario įtaką.

Iš formulės (6) matyti, kad potvynio jėgos poveikis sunkiui priklauso nuo geocentrinio atstumo iki dangaus kūno ir Žemės paviršiaus taško. Mėnulio geocentrinio atstumo kitimas gali pakeisti sunkį iki  $43,24 \mu\text{Gal}$ , o Saulės – iki  $4,73 \mu\text{Gal}$ . Lietuvoje šie pokyčiai gali siekti  $30,49 \mu\text{Gal}$  dėl Mėnulio ir  $2,90 \mu\text{Gal}$  – dėl Saulės poveikio. Žemės paviršiaus taškų geocentrinio atstumo kitimas iki  $20 \text{ km}$  keičia Mėnulio įtaką iki  $0,45 \mu\text{Gal}$ , o Saulės – iki  $0,17 \mu\text{Gal}$ .

### 4. Vertikalės nuokrypis

Potvynio potencialo išvestinė horizonto kryptimi lygi potvynio jėgos projekcijai į astronominio horizonto plokštumą. Ji išreiškia sunkio krypties pokytį. Vertikalės nuokrypis  $v'$  nustatomas pagal formulę:

$$v' = -\frac{\partial V_T}{gR\partial z} \tag{8}$$

Remdamiesi potvynio potencialo išraiška (4) galime rašyti:

$$v' = \frac{3 GmR}{2 gr^3} \sin 2z + \frac{3GmR^2}{2gr^4} (4 - 5\sin^2 z) \sin z + \frac{5GmR^3}{4gr^5} (4 - 7\sin^2 z) \sin 2z. \tag{9}$$

Vertikalės nuokrypis realiai (elastiškai) Žemei gali būti nustatytas pagal formules:

$$v = \gamma_2 v', \quad \gamma_2 = 1 + k_2 - h_2, \quad \gamma_2 = 0,694 0, \tag{10}$$

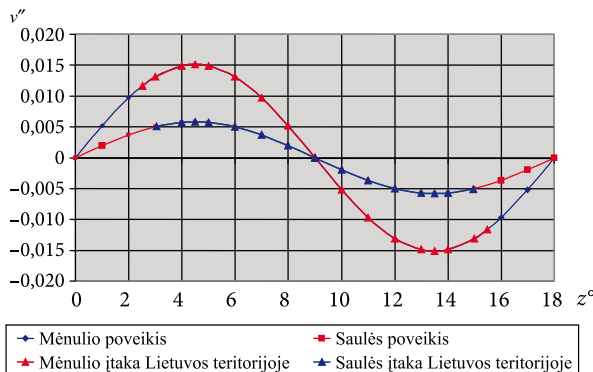
kai vertikalės nuokrypis nustatomas Žemės paviršiaus atžvilgiu;

$$v_p = \beta_2 v', \quad \beta_2 = 1 + k_2 - l_2, \tag{11}$$

$$l_2 = 0,0841, \quad \beta_2 = 1,2152,$$

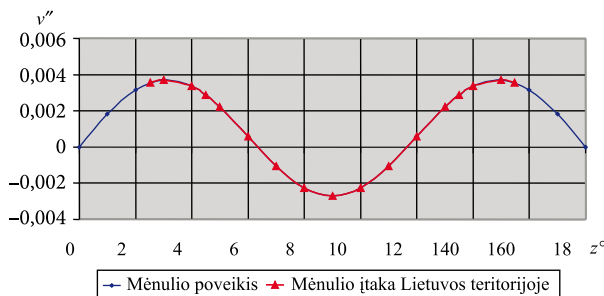
kai vertikalės nuokrypis nustatomas Žemės sukimosi ašies atžvilgiu.

Vertikalės krypties Žemės sukimosi ašies atžvilgiu kitimas pagal zenitinį nuotolį parodytas 4 paveiksle.



4 pav. Vertikalės krypties kitimas  
Fig 4. Change of the deflection of the vertical

Dėl Mėnulio poveikio vertikalės kryptis gali pakisti iki 0,030 2", dėl Saulės – 0,010 6". Tokie patys pakitimai ir Lietuvos teritorijoje. Formulės (9) antrojo nario įtaka (5 pav.) neviršija 0,006 4" dėl Mėnulio ir 0,000 01" dėl Saulės poveikio. Tyrimai rodo, kad trečiasis narys vertikalės kryptį gali keisti iki 0,000 04".



5 pav. Antrojo nario įtaka vertikalės nuokrypiui  
Fig 5. Influence of the second member to deflection of the vertical

Mėnulio ir Saulės lemiamas vertikalės nuokrypis Žemės paviršiaus atžvilgiu 1,751 karto mažesnis.

### 5. Aukščių skirtumo pokytis

Keičiantis vertikalės krypties keičiasi Žemės paviršiaus taškų aukščių skirtumas, nustatomas atliekant geometrinį niveliavimą. Aukščių skirtumo dangaus kūno vertikalė pokytis  $\delta h'$  gali būti randamas pagal formulę:

$$\delta h' = v' d, \tag{12}$$

čia  $d$  atstumas tarp taškų. Taikydami formulę (9) gauname:

$$\delta h' = \frac{3 Gm_1 R}{2 gr^3} d \sin 2z + \frac{3Gm_1 R^2}{2gr^4} d (4 - 5\sin^2 z) \sin z + \frac{5GmR^3}{4gr^5} d (4 - 7\sin^2 z) \sin 2z. \tag{13}$$

Realiai Žemei galime parašyti:

$$\delta h = \gamma_2 \delta h'. \tag{14}$$

Atlikti tyrimai rodo, kad aukščių skirtumo svyravimai gali siekti 0,366 mm dėl Mėnulio ir 0,141 mm dėl Saulės poveikio, kai atstumas tarp punktų 2,5 km. Formulės (13) antrasis narys gali keisti aukščių skirtumą iki 0,008 mm, vertinant Mėnulio poveikį. Dėl Saulės poveikio šis narys keičia aukščių skirtumą tik iki 0,000 007 mm. Trečiojo nario poveikis nežymus ir tesiekia 0,000 2 mm dėl Mėnulio, todėl šiuo metu atliekant precizinį niveliavimą pakanka imti formulės (13) du narius. Dangaus kūno įtakos aukščių skirtumui kitimo pobūdis panašus kaip ir vertikalės nuokrypiui (4 ir 5 pav.).

Dėl atstumo iki Mėnulio pokyčių aukščių skirtumas gali kisti iki 0,061 mm, o iki Saulės – 0,007 mm, todėl atstumų pokyčius precizinėje niveliacijoje reikia įvertinti.

Nagrinėjant dangaus kūnų įtaką, skirtingi Žemės paviršiaus taškų geocentriniai atstumai gali keisti aukščių skirtumą iki 0,000 6 mm Mėnulio ir 0,000 2 mm Saulės. Kadangi geocentriniai atstumai Lietuvos teritorijoje pokyčiai nedideli, tai vertinant dangaus kūnų poveikį galima taikyti vidutinės geocentrinio atstumo sunkio reikšmes. Tariant, kad Žemės paviršiuje sunkio pagreitis gali pakisti nuo 978,033 Gal iki 983,219 Gal, gaunamas jį atitinkantis 0,001 4 mm aukščių skirtumo pokytis dėl dangaus kūnų poveikio.

Gauti dangaus kūnų įtakos įvertinimo rezultatai gali būti panaudoti vykdant precizinius geodezinius, gravimetrinius ir astronominis matavimus bei apdorojant jų duomenis.

### 6. Išvados

1. Įvertinta dangaus kūno įtaka sunkiui, vertikalės krypties ir su ja susijusiam aukščių skirtumui. Dėl Mėnulio ir Saulės poveikio maksimalus sunkio pokyčių diapazonas atitinkamai 196,05  $\mu$ Gal ir 74,36  $\mu$ Gal, vertikalės nuokrypis Žemės sukimosi ašies atžvilgiu – 0,030 2"

ir 0,010 6" bei aukščių skirtumo, kai atstumas tarp punktų 2,5 km, – 0,366 mm ir 0,141 mm.

2. Įvertintas Mėnulio ir Saulės poveikis nagrinėtiems sunkio lauko parametrams Lietuvos teritorijoje. Maksimalus sunkio pokyčių diapazonas – 157,81  $\mu$ Gal ir 55,24  $\mu$ Gal, vertikalės nuokrypio – 0,030 2" ir 0,010 6" bei aukščių skirtumo – 0,366 mm ir 0,141 mm.

3. Įvertinta potvynio potencialo antrojo ir trečiojo narių įtaka. Dėl šių narių sunkis gali kisti atitinkamai iki 5,35  $\mu$ Gal ir 0,09  $\mu$ Gal, vertikalės nuokrypis – iki 0,006 4" ir 0,000 04" bei aukščių skirtumas – 0,008 mm ir 0,000 2 mm, kai nagrinėjamas Mėnulio poveikis. Nagrinėjant Saulės poveikį antrojo ir trečiojo narių įtaka žymiai mažesnė.

4. Geocentrinio atstumo iki dangaus kūnų kitimas gali turėti įtakos Mėnulio ir Saulės poveikio sunkio kitimui atitinkamai 43,24  $\mu$ Gal ir 4,73  $\mu$ Gal bei poveikio aukščių skirtumui – 0,061 mm ir 0,007 mm.

5. Skirtingi Žemės paviršiaus taškų geocentriniai atstumai gali turėti įtakos Mėnulio ir Saulės poveikio sunkio kitimui atitinkamai 0,45  $\mu$ Gal ir 0,17  $\mu$ Gal bei aukščių skirtumui – 0,0006 mm ir 0,0002 mm.

6. Dėl skirtingų sunkio Žemės paviršiuje reikšmių gali kisti Mėnulio ir Saulės poveikis aukščių skirtumui – 0,001 mm ir 0,0004 mm.

## Literatūra

- Aksamitauskas, Č.; Petroškevičius, P.; Zakarevičius, A.; Stanionis, A. 2005. Geodetic Measurements for the Estimation of Eco-Geodynamic Risks in the Area of the Ignalina Nuclear Power Plant, in *Recent Developments in Environmental Protection*. European Academic Publishers, Bergen, 237–251. ISSN 1424-0467.
- Būga, A. et al. 2006. Ongoing Developments of Lithuanian National Geodetic Control, *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. Band 38. EUREF publication 15*: 255–262. ISSN-1436-3445.
- Burša, M.; Kostelecky, J. 1999. *Space Geodesy and Space Geodynamics*. Prague. 459 p.
- Ihde, J. et al. 2006. Status of the European Combined Geodetic Network (ECGN), *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. Band 38. EUREF publication 15*: 198–204. ISSN-1436-3445.
- Jentzsh, G. et al. 1999. Earth Tides and Ocean Tidal Loading on Greenland: Correction of Surface Deformations by Tidal Gravity Measurements, in *IUGG 99: XXII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Birmingham, 19–24 July, 1999*.
- Kenyeres, A. et al. 2007. Establishment of a European Continental GPS/leveling Network, in *Proceedings of the 1st. International Symposium of the International Gravity Field Service*. Turkey, 124–129. ISSN 1300-5790.
- Krikštaponis, B.; Paršeliūnas, E.; Petroškevičius, P.; Putrimas, R.; Zakarevičius, A. 2007. Realization of Vertical Datum and height system of Lithuania, in *Proceedings of the 1st. International Symposium of the International Gravity Field Service*. Turkey, 142–147. ISSN 1300-5790.
- Mäkinen, J.; Petroškevičius, P. 2003. Lietuvoje atliktų absoliutinių sunkio matavimų analizė [Analysis of the absolute gravity observations in Lithuania], *Geodezija ir kartografija [Geodesy and Cartography]* 29(4): 99–105.
- Mäkinen, J. et al. 2006. Regional Adjustment of Precise Levelings around the Baltic, *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. Band 38. EUREF publication 15*: 171–183. ISSN-1436-3445.
- Mäkinen, J. 2000. A Note on the Treatment of the Permanent Tidal Effect in the European Vertical Reference System (EVRS), in *Report on the Symposium for Europe (EUREF) held in Tromsø, 22–24 June 2000, München*, 111–113.
- Moritz, H. 1984. Geodetic Reference System 1980, *Bull. Géod.* 58(3): 388–398.
- Paršeliūnas, E.; Petroškevičius, P. 2007. Quality of Lithuanian National Gravimetric Network, in *Proceedings of the 1st. International Symposium of the International Gravity Field Service*. Turkey, 388–392. ISSN 1300-5790.
- Petroškevičius, P. 2004. *Gravitacijos lauko poveikis geodeziniam matavimams*. Vilnius: Technika. 290 p.
- Poutanen, M.; Vermeer, M.; Mäkinen, J. 1996. The Permanent Tide in GPS Positioning, *Journal of Geodesy*, 499–504.
- Skeivalas, J.; Krikštaponis, B. 2001. **Normalinių aukščių nustatymo tikslumo analizė** [Analysis of accuracy in normal height determination], *Geodezija ir kartografija [Geodesy and Cartography]* 27(3): 101–103.
- Torge, W. 1989. *Gravimetry*. Berlin; New York: de Gruyter, 465.
- Varga, P. 1989. Love Numbers and the Inner Structure of the Earth, in *6<sup>th</sup> Inter Symposium Geodesy and Physics of the Earth, Proc Part 1. Veröff ZIPE 102*: 376–396.
- Zakarevičius, A.; Anikėnienė, A. 2007. Dabartinių geodinamių procesų tyrimas šiaurės rytinėje Lietuvos dalyje [The research on the present geodynamic processes in the north-west part of the territory of Lithuania], *Geodezija ir kartografija [Geodesy and Cartography]* 33(2): 41–46.

---

**Petras PETROŠKEVIČIUS**. Prof., Doctor Habil.

Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: gi@ap.vgtu.lt

Author of 1 monograph and more than 120 scientific publications. Participated in many intern conferences.

Research interests: determination of Earth satellites orbits, research of Earth gravity field by means of satellite geodesy and gravimetric methods, establishment of geodetic and gravimetric networks.

---

**Darius POPOVAS**. MSc., PhD student. Dept of Geodesy and Cadastre. Vilnius Gediminas Technical University. Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: darius@geobiuras.lt

Research interests: GNSS; Earth gravity field.