

**GPS VARTOTOJO IMTUVO PROGNOZINIŲ KOORDINAČIŲ TIKSLUMO
ĮVERTINIMAS, TAIKANT REFERENCINIŲ STOČIŲ TINKLĄ****Jonas Skeivalas***Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva
El. paštas Jonas.Skeivalas@ap.vgtu.lt**Įteikta 2008-01-10, priimta 2008-04-16*

Santrauka. Analizuojamas GPS vartotojo imtuvo prognozinio modelio, naudojamo taškų koordinatėms pataisoms nustatyti taikant referencinių stočių tinklą, tikslumas. GPS vartotojo imtuvo taškų prognozinių koordinatėms tikslumas įvertinamas kovariacijų matrica, kuri sudaroma iš dviejų komponentių. Viena komponentė rodo prognozinio modelio parametrų klaidų, antroji kovariacijų matricos komponentė – apriorinių geocentrinėms stačiakampių koordinatėms, kaip regresinės lygties koeficientų, klaidų įtaką GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatėms tikslumui.

Reikšminiai žodžiai: GPS, prognozinis modelis, kovariacijų matrica.

1. Įvadas

GPS referencinių stočių matavimų duomenys apibendrinami ir sisteminami virtualiosiose referencinėse stotyse, taikant atitinkamą modelį. Taip patikimiau ir tiksliau nustatoma GPS signalų vartotojų padėtis, priimant tam tikro modelio pavidalą iš virtualiųjų stočių transliuojamus signalus (Hankemeier 2002; Skeivalas 2006a, 2007; Skeivalas, Dargis 2007; Teunissen 2002; Wanninger 2003). Straipsnyje nagrinėjamas GPS vartotojo imtuvo prognozinio modelio taškų koordinatėms nustatyti, taikant referencinių stočių tinklą, tikslumas. Prognozinio modelio parametrų reikšmės apskaičiuojamos GPS virtualiojoje referencinėje stotyje, o regresinės lygties koeficientams nustatyti taikomos apytikrės GPS vartotojo taškų koordinatės, išmatuotos atitinkamose epochose. Šių koordinatėms bei modelio parametrų tikslumas turi įtakos GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatėms tikslumui. Straipsnyje analizuojamas prognozinių koordinatėms tikslumas, sudarant kovariacijų matricą iš dviejų komponentių. Viena komponentė rodo modelio parametrų klaidų, antroji kovariacijų matricos komponentė – regresinės lygties koeficientų klaidų įtaką GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatėms tikslumui.

2. Regresinės lygties koeficientų klaidų įtakos analizė

GPS vartotojo taško geocentrinės stačiakampės prognozines koordinatės $(\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)$ vektoriniu pavidalu rašomos:

$$\tilde{T}_s = T_s + \delta T_s, \quad (1)$$

čia $\tilde{T}_s = (\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)^T$ – prognozinių erdvinėms koordinatėms vektorius, $T_s = (X_s, Y_s, Z_s)^T$ – atitinkamose epochose

apytikriai išmatuotų koordinatėms vektorius, δT_s – apriorinių erdvinėms koordinatėms pataisų vektorius.

Pataisų vektoriaus δT_s reikšmė skaičiuojama pagal prognozinių modelį (Skeivalas 2006b; Teunissen 2002):

$$\delta T_s = A\tau = A_u\tau_u + A_e\tau_e, \quad (2)$$

čia $A = (A_u, A_e)$ – koeficientų matrica, sudaroma pagal vartotojų imtuvais nustatytas apriorines redukuotąsias taškų erdvinės koordinatės; A_u, A_e – atitinkamai pagrindinių ir papildomų parametrų koeficientų matrica; $\tau = (\tau_u^T, \tau_e^T)^T$ – pagrindinių ir papildomų parametrų vektorius. Prognozinių regresinio modelio parametrų vektoriaus τ reikšmė nustatoma GPS virtualiojoje referencinėje stotyje.

Prognozinių erdvinėms koordinatėms vektoriaus \tilde{T}_s skaičiuojama pagal formulę (1), kovariacijų matrica $K_{\tilde{T}_s}$ yra lygi

$$K_{\tilde{T}_s} = K_{T_s} + K_{\delta T_s} = K_{\delta T_s}. \quad (3)$$

Apriorinių erdvinėms koordinatėms vektoriaus T_s kovariacijų matrica $K_{T_s} = 0$, nes tolesnių skaičiavimų procedūrose vektoriaus T_s reikšmė laikoma nekintama, t. y. $T_s = \text{const}$.

Pataisų vektoriaus δT_s kovariacijų matrica $K_{\delta T_s}$ sudaryta iš dviejų komponentių, t. y.

$$K_{\delta T_s} = K_{\delta T_s(\tau)} + K_{\delta T_s(a)}. \quad (4)$$

Viena komponentė – $K_{\delta T_s(\tau)}$ rodo prognozinio modelio parametrų τ klaidų, o antroji komponentė – $K_{\delta T_s(a)}$ – regresinės lygties koeficientų klaidų įtaką GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatėms tikslumui.

Kovariacijų matricos $K_{\delta T_s}$ komponentę $K_{\delta T_s(\tau)}$ pagal formulę (2) galima rašyti:

$$K_{\delta T_s(\tau)} = AK_\tau A^T. \quad (5)$$

Regresinio modelio parametrų vektoriaus τ kovariacijų matrica K_τ apskaičiuojama GPS virtualiojoje referencinėje stotyje.

Kovariacijų matricos komponentei $K_{\delta T_s(a)}$ skaičiuoti formulę (2) pertvarkome į blokinės matricos pavidalą:

$$\delta T_s = A\tau = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tau, \quad (6)$$

čia A_i – matricos A i -oji eilutė, $i = 1, 2, 3$.

Toliau sudarome tokią išraišką (Skeivalas 2006b):

$$\delta T_s = \tau_0^T A_0^T = \begin{pmatrix} \tau^T & 0 & 0 \\ 0 & \tau^T & 0 \\ 0 & 0 & \tau^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ A_3^T \end{pmatrix}, \quad (7)$$

čia τ_0^T – blokinė diagonalioji matrica, A_0^T – blokinis vektorius.

Vektoriaus δT_s kovariacijų matricos komponentės $K_{\delta T_s(a)}$ išraišką, taikydami formulę (7), galime rašyti blokiniu pavidalu:

$$K_{\delta T_s(a)} = \tau_0^T K_{A_0^T} \tau_0 = \begin{pmatrix} \tau^T & & \\ & \tau^T & \\ & & \tau^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_{A_1 A_1} & K_{A_1 A_2} & K_{A_1 A_3} \\ K_{A_2 A_1} & K_{A_2 A_2} & K_{A_2 A_3} \\ K_{A_3 A_1} & K_{A_3 A_2} & K_{A_3 A_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (8)$$

čia $K_{A_i A_j} = K(A_i^T, A_j^T)$ – kovariacijų matricos $K_{A_0^T}$ blokinė dalis, t. y. vektorių A_i^T ir A_j^T kovariacijų matrica.

Kovariacijų matricos $K_{A_0^T}$ blokinės dalys $K_{A_i A_j}$ yra daugiamatės, nes matricos A kiekviena eilutė A_i (6) susideda iš k komponentių, atitinkančių vektoriaus τ komponentių skaičių k , t. y. $A_i = (A_{i1} A_{i2} \dots A_{ik})$, $i = 1, 2, 3$. Tada galime rašyti

$$K_{A_i A_j} = \begin{pmatrix} K_{i1,j1} & K_{i1,j2} & \dots & K_{i1,jk} \\ K_{i2,j1} & K_{i2,j2} & \dots & K_{i2,jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{ik,j1} & K_{ik,j2} & \dots & K_{ik,jk} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

čia $i, j = 1, 2, 3$; $K_{A_i A_j} = K_{A_j A_i}$.

Prognozinio regresinio modelio koeficientų matricos A nariams skaičiuoti taikomos nustatomo taško apriorinės redukuotosios erdvinės koordinatės, gautos epochose. Taikant 6-osios eilės regresinę lygtį ir erdviųjų koordinatžių korektūrą, galimas toks matricos A variantas:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y & Z & X^2 & 0 & 0 \\ X & Y & Z & 0 & Y^2 & 0 \\ X & Y & Z & 0 & 0 & Z^2 \end{pmatrix}.$$

Kovariacijų matricos $K_{\delta T_s(a)}$ (8) blokinė dalis $K_{A_1 A_1}$ ir $K_{A_1 A_2}$ išraiškos:

$$K_{A_1 A_1} = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} & K_{XX^2} & 0 & 0 \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{YZ} & K_{YX^2} & 0 & 0 \\ K_{ZX} & K_{ZY} & K_{ZZ} & K_{ZX^2} & 0 & 0 \\ K_{X^2 X} & K_{X^2 Y} & K_{X^2 Z} & K_{X^2 X^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$K_{A_1 A_2} = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} & K_{XY^2} & 0 & 0 \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{YZ} & K_{YY^2} & 0 & 0 \\ K_{ZX} & K_{ZY} & K_{ZZ} & K_{ZY^2} & 0 & 0 \\ K_{X^2 X} & K_{X^2 Y} & K_{X^2 Z} & K_{X^2 Y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Kovariacijos K_{XX} , K_{XY} , K_{XZ} yra nustatomos apdorojant matavimų rezultatus, gautus epochose. Kitos kovariacijos yra lygios:

$$\begin{aligned} K_{XX^2} &= M\{(X - MX)(X^2 - MX^2)\} = \\ &= M\{\delta X \cdot 2MX \cdot \delta X\} = 2MXDX, \\ K_{YX^2} &= M\{2\delta Y \cdot MX \cdot \delta X\} = 2MX \cdot K_{XY}, \quad X^2 \equiv \\ &\equiv (MX)^2 + 2MX \cdot \delta X, \\ K_{ZX^2} &= M\{2\delta Z \cdot MX \cdot \delta X\} = 2MX \cdot K_{XZ}, \\ K_{X^2 X^2} &= M\{4MX \cdot \delta X \cdot MX \cdot \delta X\} = 4(MX)^2 \cdot DX, \\ K_{XY^2} &= 2MYK_{XY}; \quad K_{YY^2} = 2MYDY; \\ K_{ZY^2} &= 2MYK_{YZ}; \quad K_{X^2 Y^2} = 4MXMYK_{XY}, \end{aligned}$$

čia MX , DX – atitinkamai dydžio X vidurkis ir dispersija.

Tuo atveju, kai epochose išmatuotų erdviųjų koordinatžių kovariacija yra maždaug vienoda ir artima nuliui, t. y. $K_{A_i A_j} = \sigma_0^2 E$, formulė (8) įgauna išraišką:

$$K_{\delta T_s(a)} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \tau^T \tau & \tau^T \tau & \tau^T \tau \\ \tau^T \tau & \tau^T \tau & \tau^T \tau \\ \tau^T \tau & \tau^T \tau & \tau^T \tau \end{pmatrix}, \quad (12)$$

čia σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

3. Eksperimentinio skaičiavimo rezultatai

GPS vartotojo imtuvu nustatytų taškų koordinatžių tikslumui, taikant prognozinę regresinę modelį, įvertinti naudotasi Lietuvos 2-osios klasės GPS tinklo matavimų duomenimis (GPS dienos 1995 m.). Prognozinio modelio parametrų reikšmės buvo apskaičiuotos panaudojus Pietų Lietuvos GPS referencinių stočių tinklą, sudarytą iš 5-ųjų GPS 2-osios klasės tinklo punktų. Taikytas GPS virtualiosios referencinės stoties modelis. Skaičiavimai

atlikti pagal sudarytą kompiuterinę programą „VRSk.m“, naudojant *Matlab* programinio paketo operatorius.

Skaičiuodami pagal formules (5) ir (12), dėl pavienio GPS vartotojo taško prognozinių koordinatų pataisų gauname šiuos kovariacijų matricos komponentių įverčius:

$$K'_{\delta T_s(\tau)} = \begin{pmatrix} 0,0014 & 0,0013 & 0,0014 \\ 0,0013 & 0,0013 & 0,0014 \\ 0,0014 & 0,0014 & 0,0014 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$K'_{\delta T_s(a)} = \begin{pmatrix} 0,033 & 0,033 & 0,033 \\ 0,033 & 0,033 & 0,033 \\ 0,033 & 0,033 & 0,033 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

čia taikyta $\tau^T \tau = 0,665$; $m_0 \approx \sigma_0 = 0,22$.

Eksperimentinių skaičiavimų rezultatai rodo, kad apriorinių erdviųjų koordinatų kaip regresinės lygties koeficientų klaidų įtaka GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatų tikslumui yra žymiai didesnė nei prognozinio modelio parametru klaidų įtaka.

Galutinis GPS vartotojo taško prognozinių koordinatų kovariacijų matricos įvertis yra lygus:

$$K_{\tilde{T}_s} = K_{\delta T_s} = K_{\delta T_s(\tau)} + K_{\delta T_s(a)} = \begin{pmatrix} 0,034 & 0,034 & 0,034 \\ 0,034 & 0,034 & 0,034 \\ 0,034 & 0,034 & 0,034 \end{pmatrix}.$$

4. Išvados

1. Atlikti teoriniai skaičiavimai, skaidant GPS vartotojo taško prognozinių koordinatų kovariacijų matricą į dvi komponentes. Viena komponentė įvertina prognozinio modelio parametru klaidų, o kita kovariacijų matricos komponentė – apriorinių geocentriųjų stačiakampių redukuotųjų koordinatų, kaip regresinės lygties koeficientų klaidų, įtaką GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatų tikslumui.

2. Regresinės lygties koeficientų klaidų įtaka GPS vartotojo taškų prognozinių koordinatų tikslumui yra žymiai didesnė nei prognozinio mode-

lio parametru klaidų įtaka. Tai nustatyta atlikus praktinius skaičiavimus.

Literatūra

- Hankemeier, P. 2002. Der Satellitenpositionierungsdienst SA-POS in Deutschland, in *Multifunktionale GNSS-Referenzstationssysteme für Europa*. Workshop von 4–5. März 2002 in der Europäischen Akademie für städtische Umwelt. Berlin, 16–23.
- Skeivalas, J. 2006a. GPS virtualiosios referencinės stoties regresinis modelis [Regression model of virtual GPS reference station], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 32(4): 97–100.
- Skeivalas, J. 2006b. Topocentriųjų horizontinių koordinatų, transformuotų pagal geocentrinės stačiakampės koordinatės, tikslumas [Accuracy of topocentric horizontal co-ordinates transformed from geocentric Cartesian co-ordinates], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 32(2): 42–45.
- Skeivalas, J. 2007. GPS virtualiosios referencinės stoties regresinis prognozinių modelis, taikant kolokacijos metodą [The regression model of virtual GPS reference station by application of collocation method], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 33(1): 9–12.
- Skeivalas, J.; Dargis, R. 2007. GPS virtualiosios referencinės stoties regresinio prognozinių modelio eksperimentiniai tyrimai [Experimental research of regressive prognostic model of GPS virtual reference station], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 33(4): 106–110.
- Teunissen, P. J. G. 2002. The parameter distributions of the integer GPS model, *Journal of Geodesy* 1(76): 41–48.
- Wanninger, L. 2003. Virtuelle GPS-Referenzstationen für grossräumige kinematische Anwendungen, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 3: 196–202.

Jonas SKEIVALAS. Prof., Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: jonas.skeivalas@ap.vgtu.lt.

Author of two monographs and more than 150 scientific papers. Participated in many intern. conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.